

群数列 虎の巻

～奥義「あぶりだし法」で群数列を遊びつくるのじゃ！～

第1版

浅井 英臣

プロローグ

ナイストゥミーチュー、わし、群数列道場の師範グン＝スウレツじゃ。うん？名前が韓流スターみたいじゃと？カムサハムニダ、ロースハムニダ。確かに若い頃はイケメンでモテモテじゃった。顔を見せられないのが残念じゃ。おなごにも大人気で、よく送り迎えを頼まれたものじゃ。うん？それはアッシーくん*1だと？

まあそんなことはどうでもよい。お主、入門希望だそうだな。群数列は得意か？

うん？苦手だと？そう思った。顔を見ればわかる。

解答を読んでもよくわからんだと？群数列はいろんな数字が出てきて何をやっているのかわかりにくいからの。無理もない。わしも昔はよく頭がスパークしたぞ。髪が薄いのはそのせいじゃ。

じゃが心配するな。いや、髪の毛の心配ではない。わしが群数列を解くための奥義「あぶりだし法」を伝授してしんぜよう。この究極奥義を体得すれば、どんな群数列でも解けるようになる。怖いものなしじゃ。

なに？むずかしいのはゴメンじゃと？ふおっふおっふおっ。わかったらんな。簡単だから奥義なのじゃ。「わかりやすい」「感動した」という感想をたくさんもらっておる。 $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ = \sin 90^\circ$ と主張して譲らん*2道場生でも使えるようになったほど簡単じゃ。群数列が大好きになるぞ。

うん？わかったから早く教えろだと？お主せっかちじゃな。わかったわかった。しかし、奥義を学ぶには数列の基本*3は知っている必要があるぞ。わしはそこまで教えんから、知らなかったら参考書なんかで一通り学習してから戻ってこい。それさえわかっていれば奥義を体得できるはずじゃ。

準備はできたか！？それではこれより修行をはじめろ！

*1 バブル期の言葉じゃから今の若い人は知らんじやろうが、自分に気があることをいいことに女性が送り迎えに利用する男性のことじゃ。食事担当のメッシーくんやプレゼント担当のミツグくんもいるぞ。惚れてしまうとないついてしまうからお前も気をつけるんじやぞ。

*2 実話じゃ。納得させるのに苦労したぞ。

*3 等差数列、等比数列、階差数列、数列の和などじゃ。

この本について

この本は私^{*4}が管理するホームページ「感動する数学・物理」^{*5}で公開している「群数列が楽しくなる『あぶりだし法』」^{*6}を元に書いたものです。公開している内容に加えて、説明しきれなかった内容を余すところなく解説しました。

群数列が得意な人はもちろんのこと、苦手な人でも読めるようになるべくわかりやすい説明を心がけました。「あぶりだし法」でいろいろな群数列が解ける楽しさを味わってください。

この文書の著作権は浅井英臣にあります。印刷および印刷物の配布は自由ですが、電子ファイルの複製・配布は禁止します。

感想・質問などは以下までメールでお願いします。

mail@asaihideomi.com

^{*4} 浅井英臣です。グン＝スウレットではありません。

^{*5} <http://asaihideomi.com/>

^{*6} <http://asaihideomi.com/index.php?go=rkXGpB>

目次

プロローグ	1
この本について	2
第1章 理論編	4
1.1 普通の解き方	4
1.2 用語	5
1.3 「あぶりだし法」の手順	5
1.3.1 ステップ1:第 n 群の情報を求める	6
1.3.2 ステップ2:第 n 群の情報を元に問題を解く	10
1.3.3 まとめ	14
1.4 普通の解き方との比較	15
【コラム】文字の2つの顔	16
第2章 実践編	18
2.1 基本の森	18
【コラム】一般項 VS 漸化式	32
2.2 標準の沼	33
【コラム】漸化式と数学的帰納法	52
2.3 応用の洞窟	53
エピローグ	87
あとがき	88

第1章

理論編

では修行を開始する。次の例題を使って「あぶりだし法」の理論を説明するぞ。

例題

1 2 2 3 3 3 4 ...

のように自然数 n が n 個ずつ並んでいる数列がある。

- (1) はじめて 30 が現れるのは第何項か
- (2) 第 50 項を求めよ
- (3) 初項から第 50 項までの和を求めよ

群数列の典型的な問題じゃ。まず自力で解いてみよ*1。

1.1 普通の解き方

ではまず普通の解き方を確認しておく。

参考書にはこんな感じの解答がのっていることが多いぞ*2。

解答

自然数 n が第 n 群に属すると考える。

- (1) 最初の 30 までの項数は

$$1 + 2 + 3 + \dots + 29 + 1 = \sum_{k=1}^{29} k + 1 = \frac{29(29+1)}{2} + 1 = 436$$

よって、はじめて 30 が現れるのは 第 436 項

*1 ただ読むだけでは体得できんからの。自分で考えたり手を動かすことが大切じゃ。解けなくても構わんぞ。力はあるからな。

*2 理解を助けるための図や説明がついていることも多いが、それは省略するぞ。

(2) 第50項が第 n 群に属するとすると、項数に注目して

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) < 50 \leq 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)n}{2} < 100 \leq \frac{n(n+1)}{2}$$

これを解くと、 $n = 10$

第50項は第10群に属する。よって第50項は 10

(3) 第9群の末項までの項数は、

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = \frac{9(9+1)}{2} = 45$$

$50 - 45 = 5$ より第50項は5番目の10である。

よって初項から第50項までの和は

$$\begin{aligned} & 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + \cdots + 9 \times 9 + 10 \times 5 \\ &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2 + 10 \times 5 \\ &= \sum_{k=1}^9 k^2 + 10 \times 5 \\ &= \frac{9(9+1)(2 \times 9 + 1)}{6} + 50 = 285 + 50 = \underline{335} \end{aligned}$$

どうじゃ？よくわからなくても心配いらんど。

1.2 用語

群数列で使う用語を説明するぞ。

- 項… 並んでいる数字のことじゃ。例題では先頭から順に1、2、2、3、… となっておる。
- 添え字… 初項から数えて何項目という意味じゃ。第5項と a_5 は同じ意味で、どちらも添え字が5じゃ。
- 項数… 項の数。初項からある項までの項の数や、ある群に属する項の数のことじゃ。

例題の問題文や解答に出てくる数字がどれのことを指しているか確認しておくよいぞ。

今すべてを理解できなくてもよいぞ。これから出てくる具体例を見ながらの方がわかりやすいからのう。そのかわり意味がわからなくなったらここに戻ってくるのじゃぞ。用語がわかっていると話が理解できんからの。

1.3 「あぶりだし法」の手順

では「あぶりだし法」の手順を説明するぞ！「あぶりだし法」には2つのステップがあるのじゃ。

- ステップ1… 第 n 群の情報を求める
- ステップ2… 第 n 群の情報を元に問題を解く

4 ページの例題を使ってこの2つのステップを説明するぞ。

1.3.1 ステップ1:第 n 群の情報を求める

このステップでは第 n 群の情報を求める。問題で聞かれてなくても求めるんじゃ。なぜかはあとで説明するからな。

問題文を読んだら下のような表を作るんじゃ。設問はまだ読まなくていい。

群	①	②	③	④	...	①
項	1	2 2	3 3 3	4 4 4 4	...	? ... ?
添え字	a_1	$a_2 a_3$	$a_4 a_5 a_6$	$a_7 a_8 a_9 a_{10}$...	$a_?$... $a_?$
項数	1コ	2コ	3コ	4コ	...	?コ

群は枠で囲み*3、添え字は a_n の形式にして、項数には「コ」をつけておる*4。これは地味じゃが重要じゃ。こうすることで、**数字が何を示しているか一目でわかるようになる**からのう。めんどくさがらずに書くのじゃ。

群数列が難しいのは、いろんな種類の数字が出てきて混乱するからじゃ。頭の中で考えていると項なのか添え字なのかわからなくなったりする。人間は一度にたくさんの情報は処理できん。だからこうやって表にして数字と意味が一目でわかるようにすると考えやすいんじゃ。

表を書いたら、第 n 群の「?」*5を以下の順番で求めるぞ。

- (1) 項数
- (2) 添え字 (末項)
- (3) 添え字 (初項)
- (4) 項 (初項と末項)

(1) 項数

まず第 n 群の項数を求める。自然数 n が n 個並ぶので、第1群は1個、第2群は2個、...、第 n 群の項数は n 個じゃな。

群	①	②	③	④	...	①
項	1	2 2	3 3 3	4 4 4 4	...	? ... ?
添え字	a_1	$a_2 a_3$	$a_4 a_5 a_6$	$a_7 a_8 a_9 a_{10}$...	$a_?$... $a_?$
項数	1コ	2コ	3コ	4コ	...	n コ

(2) 添え字 (末項)

第 n 群の初項と末項の添え字を求める。まずは末項からじゃ。第1群から第4群までの末項に注目するぞ。

*3 いちいち「第~群」と書くのはめんどうじゃから枠で囲んでおる。

*4 いちいち「個」と書くのはめんどくさいのでカタカナにしておる。

*5 「?」は、どこをを求めるかわかりやすくするためにあるだけじゃ。空白にしておけばよいぞ。

ちなみに「第 n 群の末項の添え字は、第 1 群から第 n 群までの項数の和」という規則はどんな群数列でも必ず成り立つからの。

(3) 添え字 (初項)

末項の添え字を求めたので、次に第 n 群の初項の添え字を求めるぞ。

まず、第 $(n - 1)$ 群の末項の添え字を考える。下の赤い「？」じゃ。

群	①	②	③	...	$n - 1$	n
項	1	2 2	3 3 3	? ... ?
添え字	a_1	$a_2 a_3$	$a_4 a_5 a_6$ $a?$	$a?$... $a_{\frac{n(n+1)}{2}}$
項数	1コ	2コ	3コ	n コ

第 n 群の末項の添え字が $\frac{n(n+1)}{2}$ じゃったから、第 $(n - 1)$ 群の末項の添え字は、 n のところに $n - 1$ を代入した $\frac{n(n-1)}{2}$ になるぞ。

群	①	②	③	...	$n - 1$	n
項	1	2 2	3 3 3	? ... ?
添え字	a_1	$a_2 a_3$	$a_4 a_5 a_6$ $a_{\frac{n(n-1)}{2}}$	$a?$... $a_{\frac{n(n+1)}{2}}$
項数	1コ	2コ	3コ	n コ

第 n 群の初項は第 $(n - 1)$ 群の末項の次じゃから、添え字は 1 増えて $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ になるぞ。

群	①	②	③	...	$n - 1$	n
項	1	2 2	3 3 3	? ... ?
添え字	a_1	$a_2 a_3$	$a_4 a_5 a_6$ $a_{\frac{n(n-1)}{2}}$	$a_{\frac{n(n-1)}{2}+1}$... $a_{\frac{n(n+1)}{2}}$
項数	1コ	2コ	3コ	n コ

(4) 項 (初項と末項)

最後に第 n 群の初項と末項を求める。下の赤い「？」じゃ。

群	①	②	③	...	n
項	1	2 2	3 3 3	...	? ... ?
添え字	a_1	$a_2 a_3$	$a_4 a_5 a_6$...	$a_{\frac{n(n-1)}{2}+1}$... $a_{\frac{n(n+1)}{2}}$
項数	1コ	2コ	3コ	...	n コ

第 1 群が 1、第 2 群が 2、第 3 群が 3 じゃから、第 n 群は n になるな。

群	①	②	③	...	④
項	1	2 2	3 3 3	...	n ... n
添え字	a_1	$a_2 a_3$	$a_4 a_5 a_6$...	$a_{\frac{n(n-1)}{2}+1}$... $a_{\frac{n(n+1)}{2}}$
項数	1 コ	2 コ	3 コ	...	n コ

頭のいい道場生は、こういう質問をしてくることがある。

「ゲン師範、なぜ項を求めるのが最後なのですか？項は群がわかっていればすぐに求められるので、項数や添え字より先に求めればよいのではないのでしょうか。」

うむ。その通りじゃ。しかし、それはこの問題に限ってのこと。項の求め方には2パターンあるのじゃ。

- (1) 群との関係から求められる
- (2) 添え字との関係から求められる

この問題は群と項の数が一致しておるので(1)のパターンじゃ。このパターンのときはお主の言う通り項数や添え字よりも先に求めることができる。しかし(2)ではそれができんのじゃ。(2)は、 $a_n = 2n - 1$ のように項と添え字に関係があるパターン*10で、この場合は項を求めるためには添え字が必要じゃ。そして添え字を求めるには項数が必要じゃから、項数→添え字→項という順番に求める必要がある。いつもこの順番で求めることにすればどちらのパターンかいちいち考える必要がなくて楽なのじゃ*11。

これで「ステップ1:第 n 群の情報を求める」は終了じゃ。

お主、もしかして「なんですぐに問題を解かずにこんなまどろっこしいことをやるのか？」と思っているかも知れんな。

それはな、いきなり設問に取り組むより、こうして先に第 n 群の情報を求めておく方が楽なんじゃ。

第 n 群は万能細胞なのじゃ！！

群	④
項	n ... n
添え字	$a_{\frac{n(n-1)}{2}+1}$... $a_{\frac{n(n+1)}{2}}$
項数	n コ

第 n 群の情報に $n = 2$ を代入してみい。群は2、初項は2、末項が2、初項の添え字が2、末項の添え字が3、項数が2個になる。これは第2群そのものじゃろう？

*10 このパターンは練習問題で扱うので、今よくわからなくても心配いらんど。
 *11 もちろん(1)のパターンと判断できれば最初に項を求めても構わんど。